

4.3.9.2 Mathematische Frühförderung – Inhalte, Aktivitäten und diagnostische Beobachtungen

Meike Grüßing & Andrea Peter-Koop

Erschienen in:

Brokmann-Nooren, C., Gereke, I., Kiper, H. & Renneberg, W. (Hrsg.) (2007):
Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen (S. 153-166). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Anschließend an die vorangegangenen Ausführungen der Autorinnen im zweiten Teil dieses Bandes sollen in diesem Kapitel geeignete Inhalte und Aktivitäten für die mathematische Frühförderung beschrieben, fachlich begründet und in die allgemeine bildungspolitische Diskussion eingebunden werden. Ausgangspunkt ist ein modernes Verständnis von Mathematik und mathematischer Bildung, das inhaltliche und prozessbezogene Kompetenzen einbezieht. Diese werden zunächst dargestellt und erläutert. Im Kontext mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule werden im Folgenden Ansätze für die Praxis entfaltet und theoretisch begründet. Dies schließt den Einsatz diagnostischer Verfahren und die Entwicklung von individuellen Förderplänen auf der Basis diagnostischer Befunde ein. Abschließend werden aktuelle Konzepte und Materialien für die mathematische Frühförderung vorgestellt und evaluiert sowie Implikationen für die Aus- und Fortbildung von Erzieher/-innen und Grundschullehrer/-innen abgeleitet.

Der mathematische Bildungsauftrag der Schule war und ist grundsätzlich unumstritten, auch wenn die aktuellen Bildungsstandards und Kerncurricula von ihrer Ausrichtung her einen Perspektivwechsel vornehmen – von Vorgaben dahingehend, was im Sinne des Lehrplans *gelehrt* werden soll,



zu der Formulierung von inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen, die konkret im Unterricht erworben, d.h. *gelernt* werden sollen. Internationale Vergleichsstudien belegen eindrücklich, dass diesbezüglich Ziele und Ergebnisse durchaus nicht automatisch deckungsgleich sein müssen. Auf diesen Unterschied spielt auch das folgende Cartoon an:

Hinsichtlich der Aufgaben der Kindertageseinrichtungen war der (mathematische) Bildungsauftrag

für Drei- bis Sechsjährige in der Vergangenheit offenbar nicht unumstritten, denn im Orientierungsplan für Bildung und Erziehung im Elementarbereich niedersächsischer Tageseinrichtungen für Kinder wird einleitend ausdrücklich betont, dass „es also keinen Zweifel daran geben [kann], dass Tageseinrichtungen für Kinder einen Bildungsauftrag haben – und immer hatten“ (Nds. Kultusministerium 2005: 8). Dieser frühkindliche Bildungsauftrag wird falsch verstanden, wenn er mathematische Frühförderung auf die Prävention von Rechenstörungen im letzten Kindergartenjahr vor der Einschulung und/oder die Vorwegnahme schulischer Lernformen vor der Einschulung reduziert, mit der wohlmeinenden Intention, die Kinder so am besten an die schulischen Anforderungen gewöhnen zu können. Auf der anderen Seite ist die Prävention von mathematischen Lernschwierigkeiten u.a. *ein* wichtiger Aspekt vorschulischer Förderung, zumal aktuelle Forschungsarbeiten nahe legen, dass die Vorhersage schulischer Leistungen bereits vor der Einschulung möglich ist und sich eine entsprechende Frühförderung positiv auf die Leistungen im Anfangsunterricht und darüber hinaus auswirkt (vgl. Kaufmann 2003; Krajewski 2003). Ohne entsprechende Kenntnis geeigneter diagnostischer Verfahren ist eine solche Förderung und individuelle Unterstützung jedoch kaum möglich. Daher soll auch auf die Bedeutung und auf geeignete Instrumente und Verfahren zur diagnostischen Beobachtung ebenfalls eingegangen werden.

Das folgende Kapitel steht somit im Spannungsfeld des Anspruchs einer möglichst breiten, sozial-konstruktivistisch orientierten frühen mathematischen Bildung einerseits und der Notwendigkeit der vorschulischen Intervention zur Prävention von Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens andererseits und versucht, diesbezüglich konzeptionell einen geeigneten Mittelweg zu beschreiben.

Entwicklung und Förderung mathematischer Kompetenzen

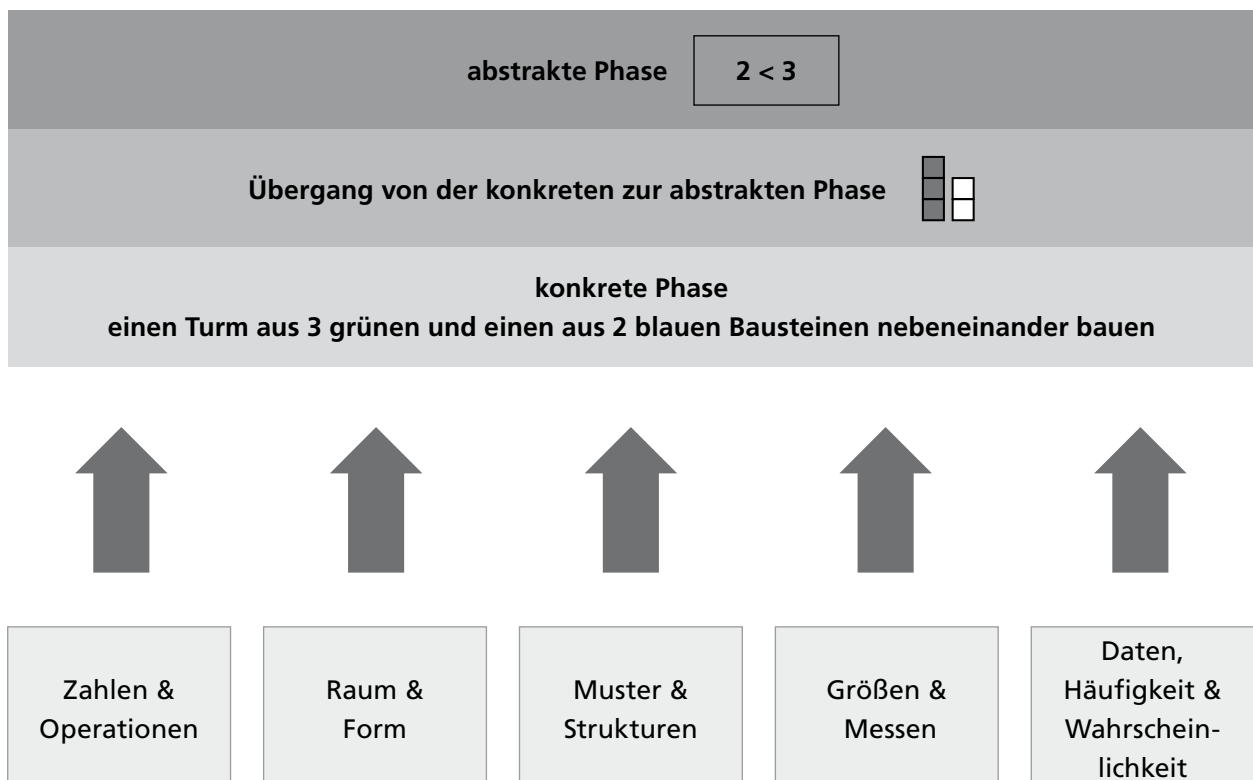
Pädagogische Fachkräfte in den Tageseinrichtungen und Lehrkräfte an Grundschulen müssen wissen, welche mathematischen Kompetenzen und Vorläuferfähigkeiten entwickelt werden sollten, wie man Kinder dabei sinnvoll unterstützen und ihre Lernausgangslage und Lernfortschritte systematisch beobachten und dokumentieren kann. Wie bereits oben erwähnt, lässt sich diesbezüglich zwischen inhaltsorientierten und allgemeinen prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen unterscheiden. Diese Begrifflichkeit soll im Folgenden geklärt und anhand von Beispielen illustriert werden.

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Die Entwicklung mathematischen Denkens und mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten ist zum einen *inhaltsorientiert*, d.h. sie bezieht sich auf

- Zahlbegriff und Operationsverständnis,
- die Entwicklung räumlicher Kompetenzen und das Unterscheiden von Formen,
- das Erkennen von Mustern und Strukturen,
- die Entwicklung von Größenvorstellungen und Kompetenzen beim Vergleichen und Messen sowie auch auf
- die Erfassung von Daten und Häufigkeiten und elementare Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit.

Diese Inhaltsbereiche bilden auch die *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich* (Kultusministerkonferenz 2005). Sie werden in der Regel von Kindern schon lange vor der Schule zunächst auf *konkreter* Ebene selbst motiviert oder angeleitet von Erwachsenen erkundet. So werden in unterschiedlichsten Situationen konkrete Gegenstände gezählt und dabei berührt und ggf. auch bewegt, unterschiedliche Formen werden erfühlt und visuell verglichen, beim Versteckenspielen werden mögliche Verstecke daraufhin geprüft, ob man hinein, darunter oder dahinter passt ohne gesehen zu werden, Muster werden bewusst oder unbewusst erzeugt (z.B. bei der Anordnung von Bausteinen), Größen werden direkt miteinander verglichen und spielerisch erkundet sowie Daten erfasst (Wie viele Kinder sind in unserer Gruppe? Wie viele davon sind Jungen bzw. Mädchen), Häufigkeiten empirisch erkundet (Wie oft kommt die 6, wenn ich zehnmal würfle? Wie oft kommt Zahl, wenn ich zehnmal eine Münze werfe?) und in Spielsituationen mit Wahrscheinlichkeiten umgegangen. Aus der Situation heraus ergeben sich dann Versuche der Kinder, erlebte Situationen festzuhalten, zu dokumentieren oder mental zu repräsentieren. Sie sind dann im *Übergang von der konkreten zur abstrakten Phase* und versuchen, Zeichnungen einer erlebten bzw. fiktiven Situationen anzufertigen, oder erfinden bzw. imitieren Symbole zur Darstellung von Mengen, Zahlen, Größen oder Formen.



Ziel des Mathematikunterrichts ist die Fähigkeit zum *abstrakten Umgang* mit Zahlen, Operationen, Formen, Größen, Mustern/Strukturen und Wahrscheinlichkeiten. Allerdings entwickeln sich inhalts-

bezogene Fähigkeiten nicht gleichförmig parallel von der konkreten zur abstrakten Phase. Ein Kind kann z.B. in Bezug auf den Umgang mit Formen durchaus zu abstrakten Leistungen fähig sein (z.B. die Form Rechteck in verschiedensten Gegenständen seiner Umwelt zielsicher erkennen, unabhängig von Lage, Größe und Material) während es sich in Bezug auf die Entwicklung des Zahlbegriffs noch auf der konkreten Ebene befindet (z.B. noch nicht fähig ist, die Zahl Vier als Repräsentant für alle Mengen mit vier Elementen zu erkennen und diesbezüglich noch keine tragfähigen inneren Vorstellungsbilder entwickelt hat).

„Beobachtungen bei Kindern zeigen, dass die Lernprozesse durchaus nicht „logisch“ ablaufen müssen, sondern dass sich gewisse Fähigkeiten und Einsichten, die aufeinander aufbauen, parallel entwickeln. So gibt es z.B. Kinder, die bei der Aufforderung, die Zahlwortreihe aufzusagen, nur bis zur 13 sicher sind, aber unmittelbar danach problemlos 20 Holzwürfel abzählen und dabei auch die Zahlwortreihe bis 20 verwenden können. Für dieses Verhalten gibt es eine durchaus plausible Erklärung: Manchen Kindern fällt offenbar das „konkrete“ (Ab-)Zählen unter Verwendung von Material leichter als das Aufsagen der Zahlwortreihe, das ein rein mentaler Prozess ist. So gibt es auch Kinder, die bei der Zahlwortreihe zunächst unter Verwendung ihrer Finger nur bis 10 kommen, und andere, die zur Unterstützung rhythmisch auf den Tisch klopfen.“ (Peter-Koop/Hasemann/Klep 2006: 10-11)

Prozessbezogene mathematische Kompetenzen

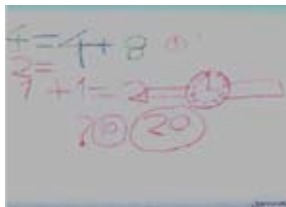
Die Entwicklung mathematischen Denkens ist jedoch nicht allein inhaltsorientiert, sondern in Bezug auf alle Teilbereiche zugleich auch *prozessbezogen*. Die Entwicklung inhaltsbezogener Fähigkeiten ist untrennbar von der Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen in der lebendigen Auseinandersetzung mit Mathematik (vgl. Kultusministerkonferenz 2005). Diese prozessbezogenen Fähigkeiten betreffen die Bereiche *Kommunizieren, Argumentieren, Darstellen, Problemlösen und Modellieren*.

Bereits im Kindergartenalter *kommunizieren* Kinder in ihrer tätigen Auseinandersetzung mit Mathematik natürlicherweise mit anderen Kindern und auch mit den sie begleitenden Erwachsenen wie (Groß-)Eltern und Erzieherinnen. Die zunächst schwerpunktmäßig verbalen und über ihre Zeichnungen und Bilder auch ikonischen Kommunikationsformen werden dann in der Grundschule ausgebaut, so dass zunehmend mathematische Fachbegriffe und Zeichen verstanden und für die Dokumentation und Mitteilung eigener Lösungswege verwendet werden können.

Auch *mathematisches Argumentieren* setzt bereits deutlich vor dem Schulanfang ein, wenn Kinder versuchen, Begründungen für beobachtete/erfahrene Sachverhalte zu suchen oder diese nachzuvollziehen. Im Übergang von der Grundschule zur weiterführenden Schule sollen Kinder zunehmend befähigt werden, mathematische Aussagen zu hinterfragen und zu überprüfen und auch auf abstrakter Ebene mathematische Zusammenhänge zu erkennen, Vermutungen zu entwickeln und Begründungen zu finden. Dies sind zum einen wichtige Vorerfahrungen für das spätere Verständnis formaler Beweise, zum anderen wird ein „natürliches Beweisbedürfnis“ angebahnt, wenn im Mathematikunterricht der Grundschule immer wieder Begründungen für mathematische Aussagen und Vermutungen eingefordert, generiert und nachvollzogen werden.

Im Übergang von der konkreten zur abstrakten Ebene kommt dem Umgang mit Darstellungen

eine zunehmend bedeutende Rolle zu. Während Kinder im Kindergartenalter häufig eigene Darstellungsformen „erfinden“ oder versuchen, in ihren Zeichnungen Darstellungen aus der Erwachsenenwelt zu verarbeiten, begegnen ihnen in der Schule vermehrt konventionelle Darstellungen (z.B. in Form von Rechensätzen, Skizzen, Tabellen, Diagrammen oder Grafiken).



Janna (5 Jahre) zeichnet ein Bild zum Thema Mathematik und kommentiert:

„Fragezeichen, 10 Cent, 20 Cent, Rechensachen und eine Uhr, weil man mit Geld ganz toll rechnen kann, Armbanduhr 3 Uhr, zum Zeit ablesen nicht zum rechnen.“ (vgl. Abels/Becker 2006)

Mathematische Aufgabenstellungen erfordern häufig das Übertragen von einer Darstellungsform in eine andere, das Vergleichen und Bewerten von verschiedenen Darstellungen sowie das Entwickeln, Auswählen und Nutzen von geeigneten Darstellungen.

Auch das Entwickeln und Nutzen von mathematischen Lösungsstrategien ist keineswegs auf den Mathematikunterricht in höheren Klassenstufen beschränkt. Bereits jüngere Kinder üben in ihrem Spiel unbewusst häufig *Problemlösen*, wie z.B. die Beobachtung von Kindern beim Spielen mit Holzgleisen und Zügen in einem holländischen Kindergarten zeigt (Klep 2006). In der Schule werden anknüpfend an diesen spielerischen Vorerfahrungen die erlernten mathematischen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben aus verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen angewandt und dabei heuristische Strategien bewusst gemacht.

Mathematisches *Modellieren* hingegen ist eindeutig eine Kompetenz, die in der Regel erst in der Grundschule angebahnt und im Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen weiter ausgebaut wird. Mathematische Modelle betreffen in der Grundschule in erster Linie Gleichungen mit natürlichen Zahlen und bekannten gängigen Größen wie Längen, Gewichten, Geldwerten oder Zeitspannen. Geometrische Modelle wie Graphiken, Situationsskizzen oder Tabellen werden hingegen laut Winter (1994: 13) meist „sträflich vernachlässigt“. In diesem Zusammenhang ergibt sich allerdings die Frage, mit welcher Substanz Kinder Modelle bilden. Denkt man an den mathematischen Anfangsunterricht bzw. die Frühförderung, so erfahren Kinder Mathematik nicht in erster Linie als Werkzeug. Mathematik wird vielmehr selbst gegenständlich modelliert, indem Gegenstände durch Zahlen präsentiert werden – nicht umgekehrt. So wird die Aufgabe $3 + 4 = \square$ nicht sofort als Gleichung präsentiert, sondern in eine kleine Geschichte eingekleidet: *Uta hat 3 Murmeln und Peter hat vier Murmeln. Wie viele Murmeln haben beide zusammen?* Dazu werden zunächst drei dann vier Murmeln abgezählt und auf den Tisch gelegt. Das Zusammenschieben der beiden Mengen zu einer Menge, d.h. das Manipulieren einer Sachsituation zur Herbeiführung einer neuen Sachsituation, soll den Prozess der Addition *veranschaulichen*. Mathematisches Modellieren ist somit die *Umkehrung* eines den Kindern bereits seit den ersten Schultagen (unbewusst) vertrauten Vorgehens (Peter-Koop 2003).

Vom Kindergartenkind zum Schulkind

Mathematische Frühförderung im Schnittfeld eines breiten mathematischen Bildungsansatzes und der frühen individuellen Förderung von potenziellen Risikokindern in Bezug auf das Mathematiklernen kann am Besten gelingen, wenn sie – wie oben dargestellt – im Einklang mit schulischen Bemühungen im Rahmen des Anfangsunterrichts sowie mit elementarpädagogischen Ansätzen steht und diese aufnimmt, ergänzt und erweitert. Konkrete diesbezügliche Handlungsfelder sollen in den folgenden Teilen thematisiert und reflektiert werden.

Unterstützung und Begleitung mathematischer Lernprozesse

Wie unter anderem ein mathematisches Bilderbuchprojekt der Autorinnen zeigen konnte (vgl. Peter-Koop/Grüßing 2006a), beinhaltet vieles, mit dem sich jüngere Kinder im Alter von drei bis sechs Jahren beschäftigen und mit dem sie spielen und umgehen, mathematische (Vor-) Erfahrungen, die möglicherweise vom Kind nicht bewusst als solche wahrgenommen werden. Alle in den Bildungsstandards für die Grundschule genannten Inhaltsbereiche kommen, wie die von Eltern gemachten Fotos belegen (vgl. auch das diesbezügliche Poster in Peter-Koop/ Grüßing 2006b), offenbar z. T. lange vor der Schule im Erfahrungsbereich der Kinder vor, verblissen jedoch häufig unbemerkt und unreflektiert. Diesbezüglich formuliert van Oers (2004) folgende Leitlinie für die Gestaltung mathematischer Frühförderung:

„Es ist Aufgabe der Pädagogin, diesen Erfahrungen Ausdruck zu verleihen und gemeinsam mit den Kindern Werkzeuge und Strategien zu entwickeln, um mit ihnen umgehen zu können. [Ihre Behandlung und Thematisierung] sollte von den gegenwärtigen Aktivitäten der Kinder abhängig gemacht werden und ihnen nicht einfach in Form eines strikten und vorformulierten Programms übergestülpt werden. In unseren Erfahrungen mit dem spielorientierten Curriculum [...] stellte sich heraus, dass die Alltagsaktivitäten der Kinder vielfältig genug sind, um für die Beschäftigung mit Zahlen, Raum, Formen oder Messvorgängen ausreichende Möglichkeiten zu finden.“ (ebd.: 327)



Ein gutes Beispiel für eine mathematisch reichhaltige und zugleich vom Kind ausgehende Situation, die für pädagogische Intervention im Sinne der mathematischen Frühförderung geeignet ist, dokumentieren die beiden Fotos von Emilia, die sie selbst mit den Worten „fünf Finger“ treffend dokumentiert hat.

Auf dem oberen rechten Foto zeigt Emilia mit der einen Hand drei und mit der anderen Hand zwei Finger, während sie auf dem unteren

linken Foto alle fünf Finger einer Hand zeigt – mathematisch gesprochen zeigen die Bilder ihre Entdeckung in Bezug auf die u.a. von Resnick (1983) beschriebenen Teil-Ganzes-Beziehungen (vgl. diesbezüglich auch das vorangegangene Kapitel der Autorinnen), d.h. sie zeigt anhand ihrer Fin-

ger unterschiedliche Darstellungsformen der Zahl Fünf, wobei das obere Foto eine Möglichkeit der additiven Zerlegbarkeit dieser Zahl beschreibt. Um dieses wichtige Prinzip bewusst zu machen, bietet es sich in einer solchen Situation an, zunächst mit dem Kind gemeinsam sprachlich in Worte zu fassen, was die beiden Bilder aussagen bzw. was das Kind gerade aktuell mit seinen Händen gezeigt hat, und andere Kinder im Umfeld in das Gespräch einzubeziehen, in dem auch sie aufgefordert werden, fünf Finger auf verschiedene Arten zu zeigen. Dies kann dann dahingehend erweitert werden, dass überlegt wird, welche verschiedenen Möglichkeiten es gibt, fünf Finger zu zeigen bzw. wie viele Möglichkeiten

es diesbezüglich gibt. Weiterhin kann dann auch mit Hilfe der Finger gemeinsam die Zerlegung anderer Zahlen untersucht sowie andere Materialien, wie z.B. Wendeplättchen, herangezogen werden, um Zahlen größer als zehn additiv zu zerlegen. Fragen wie „Wie viele Möglichkeiten, sieben Finger zu zeigen, können wir finden?“ bzw. „Wie können wir sicher sein, dass wir alle gefunden haben?“ regen zudem im Sinne des kooperativen Lernens einen sachbezogenen Diskurs der beteiligten Kinder an und fördern so ihre Fähigkeiten im Darstellen, Kommunizieren, Argumentieren und Problemlösen (vgl. die Ausführungen oben zu prozessbezogenen Kompetenzen). Neben geeigneten Werkzeugen – in dem oben dargestellten Beispiel zum Beispiel dem Einsatz von Fingern bzw. Wendeplättchen – ist auch die Gruppe der Gleichaltrigen „eine wichtige Hilfe in den Spielaktivitäten der Kinder, z.B. sind sie von unschätzbbarer Bedeutung im Aufzeigen neuer Sichtweisen, Fragen, oder Gegenargumente“ (van Oers 2004: 327-328).

„Als Pädagogen können wir diese Inhalte jedoch nicht ohne weiteres beeinflussen [...]. Wir müssen sie annehmen, wie sie kommen, und für ihre Reichhaltigkeit entsprechend empfänglich sein. Eine Pädagogin, die diesen Ansatz erfolgreich in die Spielaktivitäten der Kinder integriert, konfrontiert die Kinder nicht mit mathematischen Begriffen und Symbolen. Vielmehr ermutigt sie die Lernenden dazu, ihre Lösungsansätze anderen mitzuteilen.“ (ebd.: 328)

Wesentlich ist, dass die Kinder lernen, ihre Ideen, Vorstellungen und Erkenntnisse über Sachverhalte und ihre Einsichten in mathematische Zusammenhänge sowie ihre diesbezüglichen Vermutungen und individuellen Theorien *sprachlich* auszudrücken. Das verbale Beschreiben von Sachverhalten, Gemeinsamkeiten, Unterschieden usw. dient sowohl der Verständigung miteinander als auch der individuellen *Entwicklung von Sprachkompetenz* und der Präzisierung von Erfahrungen und Einsichten, die zuvor ‚mit allen Sinnen‘ gemacht wurden (vgl. Peter-Koop/Hasemann/Klep 2006).

Entscheidend für den Erfolg früher mathematischer Förderung ist, dass Pädagoginnen und Pädagogen „kontinuierlich die richtigen Momente ausfindig machen, um Kinder in ihrem Lernprozess zu unterstützen, ohne dabei die Qualität des Spiels der Kinder zu beeinträchtigen“ (van Oers 2004: 327). Dazu sind neben pädagogischen Qualitäten auch fundierte fachliche wie fachdidaktische Kompetenzen erforderlich, die im Rahmen der Ausbildung erworben und im beruflichen Alltag kontinuierlich ausgebaut und verfeinert werden müssen. Das Gespür für den richtigen Moment, das nur auf einer soliden inhaltlichen und didaktischen Basis entwickelt werden kann, beschreiben Clarke und Clarke (2004) auch als zentrale Kompetenz effektiver Grundschullehrerinnen und -lehrer im Rahmen einer Untersuchung der professionellen Praxis erfolgreicher Grundschulpädago-

gen: „Effective teachers use teachable moments as they occur“ (ebd.: 79).

Ziel der frühkindlichen Bildung ist es, Kinder in ihrem eigenen mathematischen Tun zu bestärken, dies bewusst und somit auch „bewahrbar“, d.h. gezielt wiederholbar und auf ähnliche Sachverhalte übertragbar, zu machen, um so die Vielseitigkeit mathematischer Inhalte und Vielschichtigkeit mathematischer Fragestellungen und Lösungsprozesse erfahrbar zu machen.

„Die Entwicklung der Kinder, elementarpädagogische Bildungskonzepte und Ziele der frühen mathematischen Bildung bedingen sich wechselseitig. Die Ziele müssen dabei klar sein, um zu erreichen, was Müller und Wittmann (2002) fordern: Die Kinder sollen nicht nur dort abgeholt werden, wo sie sind, sondern man muss sie auch dort hinführen, wo sie noch nicht waren. Die Gegenstände und Situationen, mit denen sich die Kinder bei einer mathematischen Frühförderung beschäftigen, müssen deshalb nicht immer der unmittelbaren Lebenswelt der Kinder entnommen sein.“

(Peter-Koop/Hasemann/Klep 2006: 13)

Einsatz diagnostischer Verfahren

Der oben beschriebene Ansatz mathematischer Frühförderung – ausgehend vom Kind und mathematisch reichhaltigen Situationen in seinem Spiel – steht nicht im Widerspruch zum Einsatz diagnostischer Verfahren und evtl. gezielter Interventionen.

Auch wenn internationale Untersuchungen zu den mathematischen Vorkenntnissen von Schulanfängern belegen, dass viele Kinder bereits vor der Einschulung über gute bis sehr gute Zählkompetenz sowie Fertigkeiten im anschauungsgebundenen elementaren Rechnen verfügen (vgl. Schipper 2002, Hasemann 2003), haben einige Kinder diese (Vorläufer-)Fähigkeiten noch nicht entwickelt. Einige holen dies im ersten Schuljahr mühelos nach, während andere extreme Schwierigkeiten beim Rechnenlernen entwickeln. Wie die Studien von Kaufmann (2003) und Krajewski (2003) gezeigt haben, können Kinder, bei denen später im Unterricht entsprechende Rechenschwierigkeiten auftreten, bereits vor der Einschulung anhand ihrer unzureichend ausgebildeten Vorläuferfähigkeiten identifiziert und entsprechend gefördert werden. Angesichts der erheblichen seelischen Belastungen, die massive Rechenschwierigkeiten für die Kinder und ihre Familien mit sich bringen, gilt es diesbezüglich, durch rechtzeitige Intervention in vorschulischen Einrichtungen präventiv zu arbeiten und die Kinder gezielt zu fördern.

„Die kognitiven Voraussetzungen zum Erwerb der arithmetischen Schulinhalte werden bei Schuleintritt nicht erfasst, die medizinische Schuleingangsdiagnostik legt andere Schwerpunkte. Die Ursachen der zukünftigen Störung bleiben unerkannt, da notwendige und nicht hinreichende Fähigkeiten im Vorschulalter

- *aufgrund mangelnder Anforderungssituationen nicht beobachtet werden oder*
- *die Störungen durch andere kognitive Fähigkeiten kompensiert werden können.“*

(Lorenz 2006: 55)

In Deutschland sind bislang kaum diagnostische Verfahren verfügbar, die explizit auf den vorschulischen Bereich ausgerichtet sind und somit nicht auf im Mathematikunterricht erworbenes Wissen abzielen. Zwei dieser Verfahren sollen im Folgenden hinsichtlich ihrer Erkenntnischancen in Bezug auf den Stand der Entwicklung mathematischen Denkens kurz vorgestellt werden. Darüber

hinaus finden sich förderdiagnostische Aufgaben zu verschiedenen kognitiven Faktoren zur Früh-erkennung einer möglichen Rechenschwäche bei Lorenz (2006). *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffs-entwicklung (OTZ)* Ein erprobtes Instrument, das von Erzieherinnen und Grundschullehrerinnen leicht bei einzelnen Kindern wie auch in der gesamten Lerngruppe eingesetzt werden kann, ist der Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (van Luit, van de Rijt & Hasemann 2001). Die insgesamt 40 Aufgaben des OTZ sind weitgehend bildlich repräsentiert und betreffen die Bereiche Vergleichen, Klassifizieren, Eins-zu-eins-Zuordnung, Seriation, die Verwendung von Zahlwörtern sowie neben synchronem, verkürztem und resultativem Zählen auch das Anwenden von Zahlenwissen (zur Erläuterung der Begriffe siehe das Glossar am Ende des Kapitels „Bedeutung und Erwerb mathematischer Vorläuferfähigkeiten“). Anhand der individuellen Befunde zu den einzelnen Items kann das Niveau der Zahlbegriffsentwicklung durch den Vergleich mit einer Normgruppe ermittelt werden. Allerdings bieten sich durch die vornehmlich ikonische Darstellungsform für Kinder mit visuellen Wahrnehmungsschwierigkeiten Einschränkungen und Schwierigkeiten, die das Ergebnis beeinträchtigen bzw. verzerren können.

Early Numeracy Research Project (ENRP)

Die Befragung junger Kinder bezüglich ihrer mathematischen Vorkenntnisse ist generell eine Herausforderung, denn selbst Kindern mit einer guten Sprachentwicklung fehlt zum Teil das Vokabular zur Beschreibung ihrer mathematischen Einsichten und Ideen. Daher wurde im Rahmen des australischen *Early Numeracy Research Project* ein schwerpunktmäßig materialgestützter Interviewleitfaden für Fünf- bis Siebenjährige entwickelt, der den Kindern neben verbalen Äußerungen auch handlungsgestützte Artikulationsformen ermöglicht (vgl. Bruner 1972). Zentrales Element des ENRP ist die Entwicklung eines auf *growth points* basierenden Konzepts, anhand dessen Ausprägungsgrade mathematischer Kompetenzen von Kindern zu verschiedenen Inhaltsbereichen beschrieben werden. Ausprägungsgrade werden erhoben in den Bereichen *Zählen und Rechnen, Größen und Messen sowie Raum und Form*. Mathematik für junge Kinder wird bewusst nicht ausschließlich auf Zählen und Rechnen reduziert. Somit reflektiert das ENRP Konzept die aktuellen deutschen Bildungsstandards (s.o.).

Den Nutzen einer fachlich derart breit angelegten Individualdiagnostik in Bezug auf die Entwicklung von Förderimpulsen sowie auf die Entwicklung des Mathematikunterrichts insgesamt beschreibt im Detail Wollring (2006a).

Für Kinder, denen es im Teil A (Zählen) noch nicht gelingt, eine Menge von 20 kleinen Plastikteddys auszuzählen, sowie für alle Kinder der Schuleingangsstufe (in Australien sind das die Fünfjährigen) wurde darüber hinaus ein spezieller Interviewteil zur Erfassung mathematischer Vorläuferfähigkeiten entwickelt. Eine deutsche Übersetzung der Interview-Items und ihrer Erläuterung findet sich in Grübing (2006) sowie Grübing/May/Peter-Koop (im Druck).

Wie auch das Hauptinterview (vgl. dazu ebenfalls Wollring 2006a) ist dieser Interviewteil für die Vorschulkinder stark materialbasiert, um dem vielfach zu beobachtenden Unvermögen junger Kinder, sich hinsichtlich ihrer z.T. schon elaborierten mathematischen Einsichten und Ideen entsprechend zu artikulieren, sowie auch mangelndem Sprachverständnis (u.a. bei Kindern mit Migrationshintergrund) entgegenzuwirken. Den Leistungen in diesem Vorschulinterview werden keine Ausprägungsgrade zugeordnet. Die Befunde geben vielmehr Aufschluss darüber, zu welchen

Aspekten des Zahlbegriffserwerbs ein Kind bereits wichtige Vorläuferfähigkeiten entwickeln konnte und in welchen Bereichen weiterer Unterstützungsbedarf besteht.

So wichtig die Identifizierung der Bereiche ist, in denen gezielte Unterstützung nötig ist, so reicht doch die Diagnose allein nicht aus. Diagnostische Befunde bilden die Grundlage für die Entwicklung individueller Förderpläne, die aufbauend auf den bereits vorhandenen Fähigkeiten und Fertigkeiten des Kindes den gezielten Ausbau ihrer mathematischen Kompetenzen leiten und strukturieren. Wie dies im Einzelfall konkret aussehen kann, soll anhand des folgenden Fallbeispiels verdeutlicht werden.

Von diagnostischen Befunden zu Förderplänen

Michelle wurde im Rahmen einer Längsschnittstudie der Autorinnen zu den Effekten vorschulischer Förderung (vgl. Grüßing 2006) als potentiell Risikokind in Bezug auf spätere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen identifiziert. Mit ihr wurde – wie auch mit den anderen angehenden Schulkinder ihrer Gruppe sowie rund 1000 weiteren Kindern in Oldenburg und Umland – im Sinne eines Screenings sowohl mit der OTZ als auch das ENRP-Interview durchgeführt. Michelle war zum Zeitpunkt der Befragung fünf Jahre und fünf Monate alt. Bezüglich ihrer mathematischen Kompetenzen ergab sich der folgende *diagnostische Befund*:

„Michelle kann Teddys nach Farben sortieren, eine Menge von vier Objekten auszählen und von zwei vorgegebenen Mengen die größere erkennen. Sie schafft es allerdings nicht, eine Reihe aus fünf Teddys zu legen. Michelle versteht die Lagebezeichnungen „daneben“ und „hinten“, aber nicht die Bedeutung von „vor“. Es gelingt ihr nicht, dass vorgegebene Muster aus Teddys nachzulegen oder fortzusetzen. Bei der Bestimmung von Ordinalzahlen nennt sie scheinbar willkürlich Zahlen (z.B. „der dritte“ statt „der fünfte“). Sie erfasst Mengen mit zwei oder drei Elemente simultan, strukturierte Mengendarstellungen mit vier, fünf und neun Elementen kann sie nicht erkennen. Bei Karten mit Punktefeldern bestehend aus null, zwei, drei, vier, fünf und neun Punkten kann sie nicht die entsprechenden Ziffernsymbole zuordnen. Ebenso kann sie Zahlenkarten von null bzw. eins bis neun nicht der Reihenfolge nach ordnen. Auch gelingt es ihr noch nicht, sechs Finger zu zeigen, sowie zu gegebenen Zahlen im Zahlenraum bis neun Vorgänger oder Nachfolger zu bestimmen. Die Eins-zueins-Zuordnung von Trinkhalmen zu Bechern hingegen löst sie, ebenso kann sie drei Kerzen der Länge nach ordnen – vier Kerzen hingegen nicht. Im P-Teil des ENRP-Interviews beantwortet sie insgesamt 12 von 40 Fragen korrekt. Schwierigkeiten zeigen sich in den Bereichen Lagebezeichnungen, Muster, Ordinalzahlen, Zuordnung von Ziffern zu Mengenbildern, Zahlen lesen und der Größe nach ordnen, Bestimmung von Vorgängern und Nachfolger sowie bei der Seriation.“ (Thiele 2006: 15 –16)

Auf der Basis dieser Befunde entwickelte die Studentin, die Michelle im verbleibenden halben Jahr bis zur Einschulung einmal pro Woche im Kindergarten individuell gefördert hat, folgenden *Förderplan* für die erste von insgesamt vier Fördereinheiten.

1. Förderstunde

- Synchrones und resultatives Zählen von geordneten und ungeordneten Mengen (Teddys)
- Ziffern von 1-10 benennen
- Ziffern von 1-10 ordnen
- Zahlenmemory

Schwerpunkt: Seriation (Buntstifte von klein nach groß sortieren)

2. Förderstunde

- Zuordnung von Zahlen zu Mengen (Teddys, Ziffern- und Punktekarten)
- Spiel: Mäuserennen

Schwerpunkt: Seriation

3. Förderstunde

- Zahlen lesen (am Zahlenweg)
- Zuordnung von Mengen zu Zahlen (Würfel, Zahlenweg)
- Memory (basierend auf Mengenbildern mit Tieren)

Schwerpunkt: Bestimmung von Vorgänger und Nachfolger (am Zahlenweg)

4. Förderstunde

- Bestimmung von Vorgänger und Nachfolger (Ziffernkarten)
- Domino

Schwerpunkt: Ordinalzahlen (Zählreim, Bilder mit Perlenketten)

5. Förderstunde

- Ordinalzahlen (Teddys)
- Mäuserennen

Schwerpunkt: Bestimmung von Vorgänger und Nachfolger (eigenes Spiel)

Jede der vier Fördereinheiten umfasste jeweils fünf ‚Förderstunden‘ im Umfang von 30 – 40 min. Schwerpunkte der ersten Fördereinheit sind Seriation und *Zahl- und Zählaktivitäten im Zahlenraum bis zehn*.



Für die wöchentlichen Förderstunden wurden Aktivitäten und Materialien individuell auf Michelles Bedürfnisse abgestimmt, wie z.B. das Zahlen lesen auf dem Zahlenweg (vgl. dazu die dritte Förderstunde). Das nebenstehende Foto zeigt ein weiteres Kind bei Zweiersprüngen auf dem Zahlenweg (vgl. Friedrich/de Galcóczy 2004).

Über die Phasen der Einzelförderung hinaus konnte Michelle auch in kleinen Gruppen gemeinsam mit anderen Kindern weitere spielerische Erfahrungen mit mathematischen Inhalten machen. Ein weiteres diagnostisches Interview kurz vor Schulbeginn zeigt, dass Michelle im Rahmen der Förderung wichtige Vorläuferfähigkeiten im Bereich Zählen und im Anwenden von Zahlenwissen festigen und weiterentwickeln konnte.

Materialien und Konzepte für die mathematische Frühförderung

Abschließend sollen kurz einige Materialien und Konzepte für die mathematische Frühförderung vorgestellt und kommentiert werden. Anregungen für die Gestaltung des Übergangs vom Kindergarten in die Grundschule finden sich ferner in Peter-Koop et al. (2006). Für den Einsatz in der Gruppe sowie in der Einzelförderung im Kindergarten und im Anfangsunterricht sind die Aktivitäten des „Kleinen Zahlenbuchs“ (vgl. Müller/Wittmann 2002, 2004) geeignet. Hier handelt es sich um mathematische Spiele, die sowohl Kinder untereinander als auch Erwachsene mit Kindern spielen können. Seitens der pädagogischdidaktischen Begleitung besteht die Herausforderung darin, die Kinder durch geeignete Fragen in ihrem mathematischen Denken anzuregen, z.B. durch „Was musst du jetzt würfeln, damit du vorne bist?“ oder „Was meinst du, kann ich noch gewinnen?“ Anders als die mathematisch fundierten Spiele in den „kleinen Zahlenbüchern“, die ohne Einbettung in Geschichten oder ähnliches leicht zugänglich sind, sind die Aktivitäten aus dem Konzept „Zahlenland“ (vgl. u.a. Friedrich/de Gáloczy 2004) entsprechend „verpackt“ und haben eher einen Lehrgangscharakter. So wirken sie in ihrer Gesamtheit trotz ihres spielerischen Zugangs und sehr geeigneter einzelner Materialien (vgl. den o.g. *Zahlenweg*) eher verschult. Auch liegt der Schwerpunkt hier eindeutig im Bereich der Arithmetik, ein breites Bild von Mathematik wird nicht porträtiert. Problematisch sind ferner Äußerungen wie „Seid freundlich zu den Zahlen, dann sind die Zahlen auch freundlich zu euch.“ Man mag sich vorstellen, was ein Kind, das Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zeigt, u.U. empfindet. Hat es vielleicht die Zahlen nicht freundlich genug begrüßt und ist daher selbst schuld?!

Einen spielerischen Zugang zur Mathematik über freie Eigenproduktionen der Kinder beschreibt Hülswitt (2006). Durch die Bereitstellung von *gleichem Material in großer Menge* werden Kinder angeregt, allein oder gemeinsam „Mathematik zu erfinden“ und ihre Ideen mit und über das Material zu artikulieren. Auch bei diesem Ansatz kommt der Pädagogin eine bedeutende Rolle bei der Moderation der Gespräche über die verschiedenen „Erfindungen“ in der Gruppe zu, denen übrigens inhaltlich keine Grenzen gesetzt sind und so einen breiten Zugang zur Mathematik erlauben.

Auch das gemeinsame Betrachten eines (selbst erstellen) mathematischen Bilderbuchs kann die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten aus der Lebenswelt der Kinder unterstützen und bewusst machen. Hierbei ist es wieder entscheidend, wie die Pädagogin oder auch die Eltern mit dem Kind über das Gesehene sprechen und es anregen, seine eigenen Erfahrungen zu artikulieren. So ergeben sich häufig auch Ideen für das eigene mathematische Tun der Kinder. Anregungen für die Herstellung eines solchen Bilderbuchs finden sich in Peter-Koop und Grübing (2006a; 2006b), ferner ist ein Bilderbuch mit Begleitmaterial für die vorschulische Förderung derzeit in Vorbereitung.

Die Rolle der Geometrie in der vorschulischen Förderung thematisiert Wollring (2006b). Er entfaltet „Spiel-Räume“ in Bezug auf Lernumgebungen zu achsensymmetrischen Mustern anhand von Zeichnungen („Transparent Kopieren“), Collagen aus Quadraten und sogenannten „Kindermustern aus Kindern“, bei denen Elemente aus den Bereichen Sport und Tanzen aufgegriffen werden. Zentrale

Grundidee dieses Ansatzes ist das *Verständnis der Geometrie im Sinne von Pläne machen und Pläne lesen*, wobei Wollring den so entstehenden Bildern eine Bedeutung über die Geometrie hinaus zuweist:

„Bei der Vielfalt an Bildern und Medienreizen, denen Kinder in ihrer Lebenswelt ausgesetzt sind, ist ein gezieltes und bewusstes mitgestaltendes Umgehen mit Bildern schon für sich ein Bildungsziel und ein entscheidender Teil medialer Bildung. In unserem Zusammenhang aber lenkt es den Aspekt beim Herstellen und Nutzen von Bildern auf das Funktionale. Das Betonen dieser Dimension stärkt die intellektuelle Autonomie beim Umgehen mit Bildern insgesamt.“ (ebd.: 88)

Entscheidend bei allen Bemühungen um eine vorschulische Förderung im Spannungsfeld von mathematikbezogenen Bildungsansprüchen auf der Basis eines umfassenden Mathematikverständnisses und der Lebenswelt der Kinder einerseits und der Notwendigkeit der gezielten Intervention zur Prävention von Rechenstörungen andererseits ist die Gestaltung entsprechender *Spiel-Räume*, „das heißt, dass Gelegenheit besteht, Gegenstände oder Material oder Bilder oder was auch immer flexibel zur gestalten und zu strukturieren und aus dem Festgehaltenen und aus den Änderungen Schlüsse zu ziehen und Beschreibungen abzuleiten“ (ebd.: 82).

Implikationen für die Aus- und Fortbildung

Das umfangreiche Arbeitsfeld von Pädagoginnen in Kindergarten und Grundschule ist in den obigen Ausführungen ansatzweise skizziert und illustriert worden.

Pädagogische Fachkräfte in Kindertagesstätten müssen demnach in der Lage sein, mathematisch reichhaltige Situationen und Aspekte im kindlichen Spiel zu identifizieren, um diese im Sinne der frühen mathematischen Bildung konstruktiv zu nutzen. Auch sollten sie fähig sein, Kinder in Bezug auf die Entwicklung ihres mathematischen Denkens gezielt zu beobachten und ggf. geeignete diagnostische Instrumente heranzuziehen. Bei Bedarf gestalten sie individuelle Fördermaßnahmen für potentielle Risikokinder in Bezug auf das Mathematiklernen und ermutigen Kinder generell zur altersgemäßen Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen und Inhalten – individuell und in Interaktion mit anderen Kindern.

Lehrkräfte an Grundschulen müssen u.a. kompetent sein in Bezug auf die Bestimmung von Lernausgangslagen im mathematischen Anfangsunterricht und diesbezügliche Aufgabensätze und Verfahren kennen und beherrschen, um Kinder abhängig von ihrem individuellen Leistungsstand im Unterricht auf breiter inhaltlicher Basis angemessen fördern und (heraus-) fordern zu können. Das bedeutet auch, dass sie ebenso wie die Kolleginnen und Kollegen im Kindergarten geeignete Materialien theoriegeleitet auswählen und entwickeln sowie (individuell) bedarfsgerecht einsetzen können.

Nur fachlich und fachdidaktisch entsprechend ausgebildete Pädagoginnen und Pädagogen sind in der Lage, diese komplexen Aufgaben kompetent zu bewältigen. Gegenwärtig besteht diesbezüglich in Deutschland ein dringender Bedarf hinsichtlich der mathematischen Aus- und Fortbildung von pädagogischem Fachpersonal für Kindergarten und Grundschule, um dem mathematischen Bildungsanspruch von Kindern möglichst optimal gerecht werden zu können.

Literatur

Abels, Anke & Becker, Kathrin (2006): *Erwartungen von Kindergarten zum Schulanfang bezogen auf das Fach Mathematik: Theoretische Grundlagen und empirische Befunde*. Schriftliche Hausarbeit zur Prüfung für das Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen, Institut für Mathematik, Universität Oldenburg.

Bruner, Jerome (1972): *Der Prozess der Erziehung*, Berlin: Berlin-Verlag.

Clarke, Barbara/Clarke, Doug (2004): „Mathematics Teaching in Grades K – 2. Painting a Picture of Challenging, Supportive, and Effective Classrooms.“ In: Rheta N. Rubinstein/ George W. Wright (Hg.), *Perspectives on the Teaching of Mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, S. 67-81.

Friedrich, Gerhard/de Galcóczy, Viola (2004): *Komm mit ins Zahlenland*, Freiburg/Breisgau: Christopherus im Verlag Herder.

Grüßing, Meike (2006): „Handlungsleitende Diagnostik und mathematische Frühförderung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule.“ In: Meike Grüßing/Andrea Peter-Koop (Hg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule*, Offenburg: Mildenerger, S. 122-132.

Grüßing, Meike/May, Margarete/Peter-Koop, Andrea (im Druck): „Mathematische Frühförderung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule: Von diagnostischen Befunden zu Förderkonzepten.“ Erscheint in: *Sache Wort Zahl*.

Hasemann, Klaus (2003): *Anfangsunterricht Mathematik*, Heidelberg: Spektrum.

Hülswitt, Kerensa Lee (2006): „Mit Fantasie zur Mathematik. Freie Eigenproduktionen mit gleichem Material in großer Menge.“ In: Meike Grüßing/Andrea Peter-Koop (Hg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule*, Offenburg: Mildenerger, S. 103-121.

Kaufmann, Sabine (2003): *Früherkennung von Rechenstörungen in der Eingangsklasse der Grundschule und darauf abgestimmte remediale Maßnahmen*, Frankfurt/Main: Lang.

Klep, Joost (2006): „Persönlichkeitsentwicklung und mathematische Aktivität: Förderung mathematischer Kompetenzen beim Übergang vom Kindergarten zur Grundschule in den Niederlanden.“ In: Meike Grüßing/Andrea Peter-Koop (Hg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule*, Offenburg: Mildenerger, S. 200-216.

Krajewski, Kristin (2003): *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*, Hamburg: Kovač.

Kultusministerkonferenz (2005): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*, München: Luchterhand.

Lorenz, Jens Holger (2006): „Förderdiagnostische Aufgaben für Kindergarten und Anfangsunterricht.“ In: Meike Grüßing/Andrea Peter-Koop (Hg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule*, Offenburg: Mildenerberger, S. 55-66.

Müller, Gerhard & Wittmann, Erich (2002): *Das kleine Zahlenbuch*, Bd. 1: *Spielen und Zählen*, Seelze: Kallmeyer.

Müller, Gerhard & Wittmann, Erich (2004): *Das kleine Zahlenbuch*, Bd. 2: *Schauen und Zählen*, Seelze: Kallmeyer.

Peter-Koop, Andrea (2003): „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau? Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen.“ In: Silke Ruwisch/ Andrea Peter-Koop (Hg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*, Offenburg: Mildenerberger, S. 111-130.

Peter-Koop, Andrea/Grüßing, Meike (2006a): „Mathematische Bilderbücher – Kooperation zwischen Elternhaus, Kindergarten und Grundschule.“ In: Meike Grüßing/Andrea Peter-Koop (Hg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule*, Offenburg: Mildenerberger, S. 150-169.

Peter-Koop, Andrea/Grüßing, Meike (2006b): „Eltern und Kinder erkunden die Mathematik.“ In: *Grundschulzeitschrift* 20, Heft 195/196, S. 10-11. Peter-Koop, Andrea/Hasemann, Klaus/Klep, Joost (2006): *SINUS-Transfer Grundschule Mathematik Modul G10: Übergänge gestalten*. (<http://www.sinus-grundschule.de>)

Schipper, Wilhelm (2002): „Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen. Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos.“ In: Andrea Peter-Koop (Hg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule*, Offenburg: Mildenerberger, S. 119-140.

Thiele, Svenja (2006): *Diagnose und Förderung mathematischer Vorläuferfähigkeiten vor Schulbeginn: Einzelfallstudie zu Michelle*. Schriftliche Hausarbeit zur Prüfung für das Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen, Institut für Mathematik, Universität Oldenburg.

van Luit, Johannes/van de Rijt, Bernadette/Hasemann, Klaus (2001): *Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung*, Göttingen. Hogrefe.

van Oers, Bert (2004): „Mathematisches Denken bei Vorschulkindern.“ In: Wassilios E. Fthenakis/Pamela Oberhuemer (Hg.), *Frühpädagogik international. Bildungsqualität im Blickpunkt*, Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften, S. 313-329.

Winter, Heinrich (1994): *Sachrechnen in der Grundschule*, Bielefeld: Cornelsen.

Wollring, Bernd (2006a): „Welche Zeit zeigt deine Uhr? Handlungsleitende Diagnostik für den Mathematikunterricht der Grundschule.“ In: *Friedrich Jahresheft* 14, S. 64-67.

Wollring, Bernd (2006b): „Kindermuster und Pläne dazu – Lernumgebungen zur frühen geometrischen Förderung.“ In: Meike Grüßing/Andrea Peter-Koop (Hg.), *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule*, Offenburg: Mildenerger, S. 80-102.