4.3.9.1 Bedeutung und Erwerb mathematischer Vorläuferfähigkeiten

Andrea Peter-Koop & Meike Grüßing

Erschienen in:
Brokmann-Nooren, C., Gereke, I., Kiper, H. & Renneberg, W. (Hrsg.) (2007):
Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen (S. 153-166). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

In diesem Beitrag soll der Begriff Vorläuferfähigkeiten in Bezug auf das schulische Mathematiklernen geklärt werden. Dazu werden zunächst konkurrierende Modelle zur Entwicklung des Zahlbegriffs vorgestellt und kritisch evaluiert. Da aktuelle Studien darauf hinweisen, dass der Zählkompetenz im Rahmen der Zahlbegriffsentwicklung eine bedeutendere Rolle zukommt als das lange angenommen wurde, wird der Erwerb der Zählkompetenz im Folgenden besonders berücksichtigt. Abschließend werden Positionen zur Bedeutung der frühen mathematischen Bildung im Kontext eines modernen Mathematikverständnisses entfaltet, um die Komplexität des (frühen) mathematischen Bildungsanspruchs – wie er in den Orientierungsplänen zum Elementarbereich der verschiedenen Bundesländer formuliert wird – aus fachdidaktischer Sicht zu verdeutlichen.

Bereits im Kindergartenalter entwickeln sich „entscheidende Vorläuferfähigkeiten für die schulischen Lernprozesse" (Faust-Siehl 2001: 74). Dies gilt sicher auch für den Lernbereich Mathematik. Die Bedeutung mathematischer Vorläuferfähigkeiten vor Schulbeginn wird durch empirische Studien eindrucksvoll belegt. In einer aktuellen Längsschnittstudie im Kontext der Früherkennung von Rechenstörungen, in der die mathematische Entwicklung von Kindergartenkindern ein halbes Jahr vor Schuleintritt bis zum Ende des vierten Schuljahres untersucht wurde, konnte Krajewski (2003) einen hohen Zusammenhang zwischen mengenund zahlenbezogenem Vorwissen und den Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit zeigen. Ein erheblicher Teil der Mathematikleistung am Ende des zweiten Schuljahres lässt sich demnach durch die Kenntnis von und das Wissen über Zahlen sowie Zählfertigkeiten und frühe Rechenfertigkeiten bereits im letzten Kindergartenjahr vorhersagen. Der Förderung sog. mathematischer Vorläuferfähigkeiten kommt somit eine bedeutende Rolle im Hinblick auf die Aufgaben der pädagogischen Fachkräfte in Kindertageseinrichtungen zu. In den Orientierungsplänen der einzelnen Bundesländer für Bildung und Erziehung im Elementarbereich finden sich entsprechend mehr oder weniger dezidierte Hinweise auf mathematische Inhaltsbereiche im Rahmen der mathematischen Frühförderung. Auch wenn es hinsichtlich der thematisierten Inhalte und ausgewählten Methoden diesbezüglich in den einzelnen Ländern und Einrichtungen große Unterschiede gibt, besteht Einigkeit darin, dass bereits vor Schuleintritt mathematische Bildung verstärkt in den Blick zu nehmen und mathematische

Vorläuferfähigkeiten zu fördern sind.
Erschienen in: Brokmann-Nooren, C., Gereke, I., Kiper, H. & Renneberg, W. (Hrsg.) (2007): Bildung und Lernen der Drei- bis Achtjährigen (S. 153-166). Bad Heilbrunn: Klinkhardt. Doch was verbirgt sich hinter dem Begriff „Vorläuferfähigkeiten" in Bezug auf das schulische Mathematiklernen? Und welche Fähigkeiten sind diesbezüglich besonders bedeutsam und warum?
Diesen Leitfragen soll im Folgenden genauer nachgegangen werden. Ansatzpunkt der Ausführungen ist ein Rückblick auf die Arbeiten von Piaget, die die Praxis in Kindertagesstätten und Grundschulen in den vergangenen Jahrzehnten weltweit beeinflusst und geprägt haben, die aber in den letzten Jahren verstärkt in die Kritik von Entwicklungspsychologen und Fachdidaktikern geraten sind. Gründe für diese Kritik, alternative Konzepte sowie darauf begründete Ansätze für die frühe mathematische Bildung in Kindergärten und Vorschulen sowie im Anfangsunterricht der Grundschule sollen in diesem und einem weiteren Beitrag der Autorinnen in diesen Band (siehe Teil 3) aufgezeigt und entfaltet werden.
Untrennbar verbunden mit der Entwicklung mathematischer Vorläuferfähigkeiten ist, wie u.a. auch die o.g. Studie von Kristin Krajewski (ebd.) indiziert, die *Zahlbegriffsentwicklung*. Daher soll dieser Aspekt zunächst im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen, auch wenn mathematische Vorläuferfähigkeiten nicht allein auf Zahlbegriffserwerb reduziert werden dürfen, wie die Ausführungen im zweiten Teil dieses Beitrags zeigen sollen.

Modelle zur Entwicklung des Zahlbegriffs

Bezüglich des Zahlbegriffserwerbs lassen sich im Wesentlichen zwei konkurrierende Modelle zu den Bedingungen des Zahlbegriffs unterscheiden: das auf Piaget zurückgehende sog. *Logical Foundations* Modell und sich klar von Piagets Theorien absetzende *Skills Integration* Modelle, die neuere entwicklungspsychologische und fachdidaktische Befunde reflektieren.

Das *Logical Foundations* Modell nach Piaget

Im Rahmen der Experimente zu seiner genetischen Erkenntnistheorie beschäftigte sich Piaget unter anderem auch intensiv mit dem Aufbau des Zahlbegriffs. Dabei geht er davon aus, dass man den Begriff „Lernen" auf zwei verschiedene Arten auslegen kann: Lernen im engeren Sinn und Lernen im weiteren Sinn (vgl. Ginsburg/Opper 1998). Während beim Lernen im engeren Sinn neue, aber auf eine spezifische Situation beschränkte Informationen und Reaktionen erworben werden (z.B. beim Erlernen der Namen aller Kinder einer Kindergartengruppe), werden beim Lernen im weiteren Sinn, das Piaget mit Entwicklung gleichsetzt, allgemeine Denkstrukturen erworben, die auf viele verschiedene Situationen anwendbar sind (z.B. dass alle Menschen und Dinge Namen bzw. Bezeichnungen haben).

„Piaget ist der Ansicht, Entwicklung (Lernen im weiteren Sinn) sei der grundlegendere Prozeß. Zum einen führt Entwicklung zum Erwerb allgemeiner kognitiver Strukturen und nicht zu spezifischem Wissen oder bestimmten Verhaltensreaktionen. Zum anderen macht Entwicklung das Lernen im engeren Sinn erst möglich." (Ginsburg/Opper 1998: 268)

Piaget und seine Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter verweisen in ihren Schriften zur kognitiven

Entwicklung auf eine zeitlich aufeinander aufbauende Stufenfolge der Entwicklung. Allerdings ist die Einteilung der Entwicklung in Stadien und Unterstadien (alternativ zum Begriff Stufen werden auch die Bezeichnungen Stadien oder Phasen verwendet) in der Literatur nicht einheitlich. In Bezug auf die Entwicklung der Drei- bis Achtjährigen sind unter Rückgriff auf Flavell (1963) hier das *prä-operative* Stadium (1 ½ - 7 Jahre) und das *konkretoperative* Stadium (7 bis 11 bzw. 12 Jahre) interessant (vgl. auch Piaget 1967a). Piaget geht davon aus, dass sich der Zahlbegriff auf der Grundlage von logisch-formalen Operationen entwickelt und betont, dass ein Verständnis der Zahl nicht erreicht werden kann, bevor operationale Kompetenzen erworben worden sind (vgl. Piaget 1952). Dabei geht er im Wesentlichen von drei zentralen Operationen aus (vgl. Piaget 1967a):

- Erhaltung der Quantitäten und Invarianz der Mengen
- kardinale und ordinale Eins-zu-eins-Zuordnungen
- additive und multiplikative Kompositionen

Die Herleitung des *kardinalen* Aspekts (d.h. eine Zahl gibt die Anzahl der Elemente einer Menge an) erfolgt bei Piaget über die Klassifikationen, die Herleitung des *ordinalen* Aspekts (d.h. eine Zahl gibt den Rangplatz in einer geordneten Menge an) über die Ordnungsrelationen. Beide entwickeln sich synchron und bedingen sich gegenseitig:

„Worin besteht das Wesen der Zahl? Es besteht in der Verwandlung der Elemente in Einheiten [...]. Diese Beziehung der Teile untereinander bedeutet aber, daß das Prinzip der Aufreihung und das Prinzip der Hierarchie der Äquivalenzen zu einem einzigen Prinzip verschmolzen werden.“
(Piaget 1972: 101)

Erst wenn die konkret-operationale Stufe erreicht ist, d.h. in den meisten Fällen im Alter der Einschulung, hat das Kind nach Piaget einen operativen Zahlbegriff erworben. In der präoperationalen Stufe hingegen sei das *„operative Zusammendenken von Klassifikationen und Ordnungsrelationen aufgrund des in dieser Phase charakteristischen zentrierten Denkens nicht möglich“* (Kaufmann 2003: 18).
Piaget sieht das Verständnis des Zahlbegriffs in Abhängigkeit vom Verständnis der Klassifikation und der Seriation (zur Erläuterung dieser und anderer einschlägiger Begriffe zu Vorläuferfähigkeiten siehe das Glossar am Ende des Textes) – sogenannter logischer Operationen:

„Wir nehmen [...] an, daß die Zahl die Logik voraussetzt, daß eine logische Operation notwendig ist, damit sich eine Zahl bildet. Andererseits ist die Zahl nicht die reine Logik, sondern sie setzt zunächst eine Synthese logischer Operationen voraus.“ (Piaget 1967b: 51)

Zählübungen haben nach Piaget hingegen keinen operativen Wert und somit keinen förderlichen Einfluss auf die Zahlbegriffsentwicklung: „Man darf nämlich nicht glauben, ein Kind besitze die Zahl schon nur deshalb, weil es verbal zählen gelernt hat“ (Piaget/Inhelder 1975: 106).
Piagets Postulate zur Zahlbegriffsentwicklung beeinflussen vielfach bis heute die Arbeit von Vorschulpädagoginnen. Durch entsprechend geplante Aktivitäten regen sie die Kinder zu logischen Operationen, d.h. zum Klassifizieren und zur Reihenbildung (Seriation) an, um sie „bei der Ent-

wicklung ihres Zahlenverständnisses vorbereitend zu begleiten" (van Oers 2004: 313), obwohl bereits seit den späten 1970er Jahren Piagets Theorien in die Kritik von Entwicklungspsychologen und Fachdidaktikern gerieten. Manche Autoren vertraten gar die Ansicht, es sei nutzlos oder gar schädlich, im Rahmen der frühen mathematischen Erziehung Zählfähigkeiten zu trainieren (vgl. Copeland 1974). Dies konnte allerdings später u.a. von Clements (1984) eindeutig widerlegt werden (s.u.).

Piagets Arbeiten zum Zahlbegriffserwerb: Würdigung und Kritik

Seinerzeit galten Piagets Versuchsserien als Triumph der Experimentalwissenschaften in der Psychologie. Als Pionier legte er wichtige Grundlagen für zukünftige Forschergenerationen. Die von ihm angewandte *klinische Methode* hat die moderne Entwicklungspsychologie nachhaltig dahingehend beeinflusst, dass „den Kindern erstmalig *zugehört* wurde" (Wittmann 1981; 70).

„Während das Denken des Kindes früher gewöhnlich nur negativ durch Fehler, Mängel und Minderleistungen bestimmt wurde [...] hat Piaget versucht, die qualitative Eigenart des kindlichen Denkens positiv zu charakterisieren. Früher interessierte man sich dafür, was das Kind nicht hat, und man definierte die Eigenarten des kindlichen Denkens als seine Unfähigkeit zur Abstraktion, zur Begriffsbildung, zur Verbindung von Urteilen, zur Schlussfolgerung usw. Nun wurde dasjenige in der Mittelpunkt der Aufmerksamkeit gerückt, was das Kind hat, was sein Denken durch spezifische Eigenschaften auszeichnet." (Vygotskij 1969: 17-18)

Gut dreißig Jahre nach Vygotskij betont Devlin (2003), dass Piagets Einflüsse nicht nur in vielen unserer gegenwärtigen Vorstellungen darüber erkennbar sind, wie Kinder lernen, sondern auch in (vor)schulischen Erziehungssystemen auf internationaler Ebene. Spätere Untersuchungen zeigten allerdings „wie nur allzu oft bei bahnbrechender Forschung, dass eine Reihe von Piagets Schlussfolgerungen aus seinen Experimenten mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit nicht richtig waren" (ebd.: 44-45).
Generelle Kritik an Piagets Untersuchungen bezog sich i.W. auf forschungsmethodologische Fragen sowie auf das homogene Stufenkonzept der kindlichen Entwicklung (vgl. z.B. Brainerd 1978; Donaldson 1982; Wember 1986). Freudenthal (1973) kritisierte darüber hinaus aus fachlicher Sicht Piagets Umgang mit mathematischen Begriffen. In Bezug auf Piagets Konzept zur Zahlbegriffsentwicklung wurde vor allem die den Experimenten zur Invarianz zugewiesene Bedeutung hinterfragt. So verweist Acredolo (1982) darauf, dass zum einen semantische Missverständnisse für falsche Antworten der Kinder verantwortlich sind, zum anderen Verwirrung durch den Einsatz verschiedener Strategien entsteht, indem die Kinder Größenvergleichsstrategien (länger-kürzer, höher-niedriger) mit Zählstrategien (wie viele Objekte sind es?) kombinieren. Moser Opitz' (2001) Feststellung, dass viele Kinder ein „partielles Konzept von der Zahl und auch von der Invarianz haben, und dass dieses funktioniert, lange bevor es als klare und konsistente Regel artikuliert werden kann" (ebd.: 51), basiert u.a. auf Untersuchungen von Sophian (1995) und Fuson (1983), die zeigen konnten, dass Kinder, die bei Invarianzaufgaben erfolgreicher waren, die Mengen zählend verglichen oder eine räumliche Zuordnung vornahmen.
Ferner ist Piagets Ansatz, dass Kardinal- und Ordinalzahl weitgehend simultan entwickelt werden

(s.o.), nach verschiedenen Untersuchungen nicht länger haltbar (vgl. Brainerd 1979; Williams 1991). Es konnte gezeigt werden, dass das Verständnis der Ordinalzahl offenbar vor dem Verständnis der Kardinalzahl entwickelt wird und dass gezieltes ordinales Training zu größerem Zuwachs an arithmetischen Fähigkeiten führt als schwerpunktmäßig kardinale Aktivitäten.
Auch Ergebnisse der Säuglingsforschung stehen im Widerspruch zu Piagets Theorien. So konnte in den 1990er Jahren gezeigt werden, dass das menschliche Gehirn mit einem angeborenen Mechanismus für das Erfassen numerischer Größen ausgestattet ist (vgl. Dehaene 1999) und dass Säuglinge bereits Fähigkeiten in Bezug auf Mengendiskrimination (vgl. Starkey/Spelke/Gelman 1990), das Erkennen von Mengenveränderungen (vgl. Wynn 1992) sowie zum Schätzen von Mengen (vgl. Gallistel/Gelman 1992; Dehaene 1999) zeigen. Entsprechend folgert Stern (1998):

„Die Annahme von Piaget, dass der Mensch als numerisches Tabula-Rasa-Wesen geboren wird und dass numerische Kompetenzen als Folge der Entwicklung inhaltsunspezifischer Repräsentationsmechanismen entstehen, kann als widerlegt gelten." (ebd.: 64).

Skills Integration Modelle zur Zahlbegriffsentwicklung

Im Kontext der Kritik an Piagets Theorie zur Zahlbegriffsentwicklung und dem diesbezüglichen *Logical Foundations Model* wurden seit den 1980er Jahren basierend auf den Ergebnissen entsprechender Untersuchungen vor allem im angloamerikanischen Sprachraum alternative Modelle entwickelt, die Clements (1984) unter dem Begriff *Skills Integration Models* zusammenfasst: *„Skills integration models [...] hypothesize that the development of number concept and skills result from the integration of number skills such as counting, subitizing, and comparing"* (ebd.: 766). Diese Modelle schließen ausdrücklich frühe Zählfertigkeiten ein (vgl. Resnick 1983). Unter der Annahme, dass junge Kinder bereits über Einsichten und Fertigkeiten in Bezug auf Zahlen verfügen, basiert die Entwicklung des Zahlbegriffs auf der Integration verschiedener Begriffe, Fähigkeiten und Fertigkeiten. Besonders die Integration von sogenannten *number skills* wie Zählen, Subitizing und Vergleichen wird von Vertretern dieses Ansatzes hervorgehoben.
In einer Interventionsstudie konnte Clements (1984) zeigen, dass Vorschulkinder bezüglich ihrer Zahlbegriffsentwicklung deutlich von einem auf *number skills* basierten Training profitieren konnten. In seiner Untersuchung wurden zwei Gruppen von vierjährigen Vorschulkindern jeweils acht Wochen lang trainiert. Dabei wurden in einer Gruppe speziell logische Operationen wie Klassifikation und Seriation geübt, während in der anderen Gruppe vornehmlich Zählfertigkeiten trainiert wurden. Eine dritte Gruppe diente als Kontrollgruppe und wurde nicht speziell trainiert. Nach dem Training führten Clements und seine Mitarbeiter mit allen drei Gruppen zwei verschiedene Nachtests durch: einen *Number Skills Test* und einen *Logical Operations Test*. Da Gruppe 1 und Gruppe 2 in beiden Tests signifikant besser abschnitten als die nicht geförderte Kontrollgruppe, lässt sich ein Transfer beider Trainings auf den jeweils anderen Bereich festmachen. Ferner erzielten die Kinder der „Number Skills Gruppe" im entsprechenden Test deutliche bessere Ergebnisse als die Kinder der „Logical Operations Gruppe". Beim Test zu den logischen Operationen gab es interessanterweise jedoch keinen signifikanten Unterschied zwischen beiden Gruppen.
Die Ergebnisse der Studie indizieren demnach, dass beim Training der Zählfertigkeiten die logischen Operationen offenbar implizit mittrainiert wurden.

„[...] the counting act may provide the structure and/or representational tool with which to construct logical operations, including classification and seriation, as well as number conservation." (Clements 1984: 774-775)

Auch Moser Opitz (2001) betont, dass das operative Zahlverständnis nach Piaget nicht als Voraussetzung für numerisches Arbeiten und mathematisches Lernen ist, sondern in der Auseinandersetzung mit dem mathematischen Gegenstand erworben wird. Entsprechend ist spezielles Training in logischen Operationen nach Clements eher unnötig, während ein gut strukturiertes Training von Zählkompetenzen nicht nur die Entwicklung dieser Fähigkeiten fördert, sondern auch die Grundlage für den Erwerb eines umfassenden Zahlbegriffs bildet.

Zählkompetenz: Zahlwortreihe und Zählprinzipien

Der vielschichtige Prozess der Entwicklung der Zählkompetenz besteht u.a. aus einem Zusammenspiel bezogen auf das Aufsagen der Zahlwortreihe, dem Zählen im Sinne der Eins-zu-eins-Zuordnung von Objekt und Zahlwort sowie der Kenntnis verschiedener Zahlaspekte. Die Entwicklung des Zählens beginnt mit etwa 2-3 Jahren und durchläuft verschiedene Entwicklungsstufen und Kontexte, in denen die Kinder mit Zahlwörtern konfrontiert werden. Fuson (1983) hat den *Erwerb der Zahlwortreihe* untersucht und unterscheidet diesbezügliche fünf aufeinanderfolgende Levels: Unter dem *String Level* versteht sie die Aneinanderreihung von Zahlwörtern zu einem undifferenzierten Wortganzen „einszweidreivierfünfsechssiebenachtneunzehn". Im *Unbreakable Chain Level* gelingen erste Eins-zu-eins-Zuordnungen, d.h. im Gegensatz zum *String Level* können die einzelnen Zahlwörter voneinander abgegrenzt werden, dennoch wird die Zahlwortreihe als Einheit empfunden, die immer mit der Startzahl eins beginnt. Ein Kind, das sich im *Breakable Chain Level* befindet, kann von jeder beliebigen Startzahl weiterzählen, Vorgänger und Nachfolger benennen und teilweise auch schon rückwärts zählen. Es folgt das *Numerable Chain Level*, in dem ein Kind von jeder beliebigen Zahl schrittweise weiterzählen kann. Durch Abzählen, z.B. mit Hilfe der Finger, wird auch erstes zählendes Rechnen möglich. Im sogenannten *Bidirection Chain Level* kann schließlich von jeder beliebigen Zahl sowohl vorwärts als auch rückwärts gezählt und flexibel zählend gerechnet werden. Fuson betont, dass die Gelegenheiten und Aktivitäten, die Kindern zum Lernen und Erproben der Zahlwortreihe geboten werden, den Zahlbegriffserwerb wesentlich beeinflussen.

Die unregelmäßige linguistische Struktur der Zahlwortbildung in der deutschen Sprache birgt dabei nicht nur einige Schwierigkeiten beim Erlernen der Zahlwortreihe sondern auch bei der Erfassung der mathematischen Struktur bei der Zahldarstellung mit Hilfe strukturierter Materialien wie Krauthausen und Scherer (2001: 10) anhand folgender Tabelle verdeutlichen:

Zahlzeichen	kindliche Bezeichnung	mögliche Bezüge
10	*einszig* *nullzehn*	*vierzig* *vierzehn*
12	*zweiundzehn* *zweizehn*	*zweiundzwanzig* *dreizehn*

20	*zweizig*	*vierzig*
	zweizehn	*zweihundert*
30	*dreizehn*	*dreihundert*

Piagets Aussage, dass das Aufsagen der Zahlwortreihe noch nicht mit dem Zählen gleichgesetzt werden kann (s.o.), findet auch heute noch ungeteilte Zustimmung. In Bezug auf die Zuweisung der Zahlwörter im Zählkontext zu realen Gegenständen haben Gelman und Gallistel (1978) fünf *Zählprinzipien* identifiziert, die als elementare Muster und Strategien beim korrekten Zählen für die weitere Entwicklung des Zahlbegriffs als verantwortlich gelten:

- *Eindeutigkeitsprinzip (one-to-one-principle)*
  Jedem der zu zählenden Gegenstände darf nur ein Zahlwort zugeordnet werden (Hilfe: Antippen oder Weglegen der gezählten Objekte).
- *Prinzip der stabilen Ordnung (stable-order-principle)*
  Die Liste der Zahlworte hat eine feste Reihenfolge, d.h. die Abfolge der Zählzahlen muss stets die Gleiche sein.
- *Kardinalzahlprinzip (cardinal principle)*
  Die zuletzt benutzte Zahl im Abzählprozess gibt die Anzahl der Elemente (d.h. die Mächtigkeit) der abgezählten Menge an (sonst wären keine Vergleiche der Anzahlen möglich).
- *Abstraktionsprinzip (abstraction principle)*
  Alle beliebigen Elemente – gleichgültig, welche Merkmale sie haben – können zu einer Menge (von „Zähldingen“) zusammengefasst und gezählt werden.
- *Prinzip der beliebigen Reihenfolge (order-irrelevance principle)*
  Die Reihenfolge, in der Elemente einer Menge gezählt werden, und ihre Anordnung sind für das Zählergebnis irrelevant. Die Zahlwörter sind nicht Eigenschaft der Zählobjekte.

Fritz und Ricken (2005) beschreiben den Aufbau des Zahlbegriffs als Prozess, der sich im Zusammenspiel verschiedener Teilfertigkeiten vollzieht und folgende Bereiche umfasst: die *simultane Erfassung kleiner sowie strukturierter Mengen*, den Erwerb von *Zählkompetenzen* und *Mengenverständnis* sowie die von Resnick (1983) beschriebenen *Teil-Ganzes-Beziehungen*: *„Probably the major conceptual achievement of the early school years is the interpretation of numbers in terms of part and whole relationships. [...] to think about numbers as compositions of other numbers “* (ebd.: 114).

Ein erstes Fazit

Festzustellen ist, dass die Erforschung der Entwicklung mathematischen Denkens und seiner Bedingungsfaktoren in der frühen Kindheit längst noch nicht abgeschlossen ist. Obwohl wir heute wissen, dass für die Entwicklung von Zahlbegriff offenbar Zählkompetenz und Mengenverständnis im Hinblick auf spätere schulische Leistungen von zentraler Bedeutung sind, fehlen bislang Längsschnittstudien mit jüngeren Kinder im Alter von etwa 3 Jahren bis zur Einschulung. Dies wird besonders deutlich in Bezug auf die Rolle von Mustern in der frühen mathematischen Bildung und Erziehung. Weil Muster als wichtiger Bestandteil von Mathematik angesehen werden – Mathematik wird vielfach beschrieben als die Wissenschaft von Mustern (vgl. z.B. Devlin 1998) – finden sich in

zahlreichen Curricula, Diagnoseverfahren und auch in der Praxis von Kindergärten und Vorschulen häufig Aufgabenstellungen zum Nachlegen oder Fortsetzen von Mustern. Allerdings fehlen bislang noch weitgehend empirische Studien zur Bedeutung von Vorläuferfähigkeiten im Kindergartenalter zum Bereich Muster (vgl. Economopoulos 1998; Clarke/Clarke/Cheeseman 2006).
Entsprechend besteht gegenwärtig keine Einigkeit in Bezug auf die Fragen, welche Aspekte der Musterbildung in der frühkindlichen mathematischen Bildung Berücksichtigung finden sollten und ob Fähigkeiten im Umgang mit Mustern eher für das Verständnis von Zahlen im Kontext der Arithmetik oder für den Variablenbegriff in der frühen Algebra von Bedeutung sind.

Vorläuferfähigkeiten in einem veränderten Verständnis von Mathematik und früher mathematischer Bildung

In den letzten Jahren haben sich in Deutschland (sowie auch in vielen anderen europäischen Ländern) die gesellschaftlichen und bildungspolitischen Erwartungen an die vorschulische Bildung und Erziehung grundlegend verändert. Während lange Zeit die Vorstellung dominierte, dass der Besuch des Kindergartens in erster Linie im Sinne eines erzieherischen Auftrages der Sozialisation der Kinder dienen und u.a. ihre emotionale, soziale, motorische und moralische Entwicklung unterstützen soll, lenken die aktuellen Orientierungspläne für die vorschulische Bildung und Erziehung die Aufmerksamkeit darüber hinaus nun auch gezielt auf fachliche Lernbereiche wie Sprache, Mathematik, Natur und Lebenswelt und somit auch auf eine frühe fachliche Bildung.
In diesem Zusammenhang ergeben sich für das pädagogische Fachpersonal in Kindertagesstätten und Vorschulklassen nun Fragen bezüglich der methodisch-didaktischen Umsetzung dieses Bildungsauftrages. So wird diskutiert, inwieweit mathematische Frühförderung einen *Lehrgangscharakter* haben sollte, wie z.B. das Konzept „Zahlenland“ nahe legt (vgl. Friedrich/de Galcóczy 2004 sowie auch die diesbezüglichen Ausführungen im Kapitel „Mathematische Frühförderung – Inhalte, Aktivitäten und diagnostische Beobachtungen“ im dritten Teil dieses Bandes).
Auch finden sich in jüngster Zeit zunehmend entsprechende vorschulische mathematische Übungshefte in Buchhandlungen und auch Supermärkten, die implizieren, dass vorschulische Bildung sich an den Formen schulischen Lernens orientieren und diese vorwegnehmend einüben sollte.
Bei ihrer Arbeit in den Tageseinrichtungen orientieren sich Vorschulpädagoginnen z.T. immer noch mehr oder weniger systematisch an der operationalen Methode Piagets (vgl. dazu auch Stendler-Lavatelli 1976, die diesbezüglich detaillierte Trainingsprogramme zur Entwicklung von Zahl-, Maß- und Raumoperationen beschreibt), um Kinder im Hinblick auf die Entwicklung ihres mathematischen Denkens zu unterstützen – wobei allerdings zunehmend auch gezielte Zählaktivitäten ergänzend einbezogen werden.
Unter Fachdidaktikern und Erziehungswissenschaftlern ist der operationale Ansatz jedoch äußerst umstritten. So kritisiert van Oers (2004) die diesbezügliche Praxis in den Niederlanden wie folgt:
Operationale Ansätze

- betonen vielfach isolierte Zählfertigkeiten und Rechenoperationen, ohne dabei Bezug auf die lebensweltlichen Erfahrungen der Kinder zu nehmen (vgl. auch Gravemeijer 1994); da so das umfassendere (van Oers spricht diesbezüglich vom *wahren*) mathematische Potenzial der Kinder nicht erfasst wird, fallen ihre Leistungen entsprechend häufig relativ gering aus;
- transportieren ein sehr eingeschränktes bzw. verzerrtes Bild von Mathematik, obwohl in der

Alltagswelt von Kindern und Erwachsenen Mathematik nicht darauf beschränkt ist Rechenoperationen ausführen zu können; es sind vielmehr Kompetenzen im Problemlösen sowie im quantitativen wie relationalen Schlussfolgern erforderlich und zudem wird häufig ein Verständnis des Kontexts im Rahmen der mathematischen Lösung verlangt, wie Lave (1989) es in ihrem Ansatz zur *situierten Kognition* beschreibt;
- vernachlässigen zudem häufig den Zusammenhang zwischen Sprache und mathematischem Lernen, der in fachdidaktischen Forschungsarbeiten und Konzeptionen in den letzten zwanzig Jahren verstärkt in den Blickpunkt gerückt wurde (vgl. u.A. Pimm 1987; Steinbring 1998).

„In aktuellen Ansätzen zur Mathematikerziehung wird dagegen die Bedeutung der Sprache, des Problemlösens und des Schlussfolgerns als Basis mathematischen Denkens betont. Aus diesem Blickwinkel wird mathematisches Denken als Prozess verstanden, in dem schematische Lösungen für wichtige Problemstellungen mit Hilfe von quantitativen und räumlichen Beziehungen angestrebt werden." (ebd.: 314).

Bezüglich der Aufgaben der vorschulischen mathematischen Bildung formulieren Nunes und Bryant (1996) die Notwendigkeit, Kinder dabei zu unterstützen, die Stärke ihres logischen Denkvermögens zu erkennen und ihnen dabei zu helfen, ein soziales Verständnis von Mathematik zu entwickeln (vgl. auch Cobb et al. 1996), das es ihnen erleichtert, ihre Erfahrungen und ihr Wissen über Vorgänge der Alltagswelt mit ihrem mathematischen Lernen in Einklang zu bringen.
Da mathematisches Denken auch zunehmend als eng verbunden mit sprachlichen Kompetenzen gesehen wird (vgl. u.A. Lampert/Bunk 1998; Schmitman gen. Pothmann 2006), gilt es ferner, analog zu den Formen der Unterstützung bei der Sprachentwicklung auch die frühe Entwicklung eines mathematischen Grundverständnisses zu begleiten (vgl. Pound 1999). Entsprechend gilt es, *„die Problemlösungen der Kinder ernst [zu] nehmen und sie als alternative Wege [zu] betrachten, die Welt zu sehen und zu konzipieren"* (van Oers 2004: 315). Konkrete Inhalte und Aktivitäten sowie die Bedeutung und Anlage diagnostischer Beobachtungen im Rahmen vorschulischer mathematischer Förderung werden im Rahmen des diesbezüglichen Kapitels der Autorinnen im dritten Teil dieses Bandes ausführlich thematisiert.

Danksagung

Wir danken Angela Schmitman gen. Pothmann und Heyo Spekker für ihre konstruktiven Kommentare bei der Erstellung des Manuskripts sowie Birte Specht für ihre Unterstützung bei der Zusammenstellung der Literaturgrundlage.

Glossar

Klassifizieren	das Zusammenfassen oder Unterscheiden von Objekten nach Übereinstimmungen bzw. Unterschieden, d.h. die Zusammenfassung von Objekten zu Klassen oder Unterklassen
Vergleichen	das Vergleichen von Objekten nach quantitativen (z.B. Anzahl oder Länge) und qualitativen (z.B. Farbe) Merkmalen; wichtig ist hierzu das Ausbilden von Begriffen, die mathematische Ordnungsrelationen beschreiben (z.B. mehr, höher, die meisten etc.)
Seriation	die Anordnung von Objekten nach bestimmten Kriterien, z.B. von lang nach kurz, vom größten zum kleinsten Element etc.
Simultanerfassung bzw. Subitizing	die Erfassung der Anzahl von Elementen einer Menge auf einen Blick (in der Regel gelingt das bei Mengen mit vier bis fünf Elementen)
Mengeninvarianz	die Mächtigkeit einer Menge (d.h. die Anzahl ihrer Elemente) als invariant von Art und Lage der Elemente erkennen
Eins-zu-eins-Zuordnung	Mengen in Bezug auf ihre Mächtigkeit (d.h. die Anzahl ihrer Elmente) vergleichen, z.B. jedem Teller eine Gabel zuordnen bzw. zu überprüfen, ob zu jedem Teller eine Gabel vorhanden ist
Teil-Ganzes-Beziehungen	der Vergleich einer Teilmenge mit der Gesamtmenge, z.B. lässt sich eine Menge aus fünf Elementen aus Teilmengen mit drei und zwei Elementen zusammensetzen
verbales Zählen	die Zahlwortreihe wird aufgesagt wie ein Gedicht, sie ist noch nicht strukturiert und kann noch nicht zum Zählen eingesetzt werden; die Zahlwörter sind noch nicht auf Mengen bezogen und werden z.T. noch nicht unterschieden
asynchrones Zählen	die Zahlwörter werden zum Zählen in der richtigen Reihenfolge benutzt, doch wird oft noch ein Objekt übersehen oder mehrfach gezählt
synchrones Zählen	die Kinder zeigen beim Zählen auf genau ein Objekt
resultatives Zählen	das Abzählen von strukturierten, unstrukturierten oder versteckten Quantitäten auch ohne mit den Fingern auf die einzelnen Objekte zu zeigen

verkürztes Zählen	in mehr oder weniger geordneten Mengen von Objekten werden Strukturen erkannt oder gebildet, z.B. das Würfelzahlbild der Vier; darüber hinaus gelingt auch das Rückwärtszählen und das Zählen in Zweierschritten

Literatur

Acredolo, Curt (1982): "Conservation – Nonconservation: Alternative Explanations." In: Charles J. Brainerd (Hg.), *Children's Logical and Mathematical Cognition*, New York: Springer, S. 1-31.

Brainerd, Charles J. (1978): "Learning Research on Piagetian Theory." In: Linda S. Siegel & Charles J. Brainerd (Hg.), *Alternatives to Piaget. Critical Essays on the Theory*, New York: Academic Press, S. 68-109.

Brainerd, Charles J. (1979): *The Origins of Number Concept*, New York: Praeger.

Clarke, Barbara/Clarke, Doug/ Cheeseman, Jill (2006): "The Mathematical Knowledge and Understanding Young Children Bring to School." In: *Mathematics Education Research Journal* 18, S. 78-103.

Clements, Douglas H. (1984): "Training Effects on the Development and Generalization of Piagetian Logical Operations and Knowledge of Number." In: *Journal of Educational Psychology* 76, S. 766-776.

Cobb, Paul/Jaworski, Barbara/Presmeg, Norma (1996): "Emergent and Sociocultural Views of Mathematical Activity." In Leslie Steffe/Pearla Nesher/Paul Cobb/Gerald Goldin/Brian Greer (Hg.), *Theories of Mathematical Learning*, Mahwah, NJ: Erlbaum, S. 3-20.

Copeland, Richard W. (1974): *How Children Learn Mathematics*, New York: Macmillan.

Dehaene, Stanislas (1999): *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*, Basel: Birkhäuser.

Devlin, Keith (1998): *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Devlin, Keith (2003): *Das Mathe-Ge*n, München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Donaldson, Margaret (1982): *Wie Kinder denken*, Bern: Huber.

Economopoulos, Karen (1998): "What Comes Next? The Mathematics of Pattern in Kindergarten." In: *Teaching Children Mathematics* 5, S. 230-233.

Faust-Siehl, Gabriele (2001): „Konzept und Qualität im Kindergarten." In: Gabriele Faust-Siehl/ Angelika Speck-Hamdan (Hg.), *Schulanfang ohne Umwege*, Frankfurt/Main: Arbeitskreis Grundschule, S. 53-79.

Flavell, John H. (1963): *The Developmental Psychology of Jean Piaget*, New York: van Nostrand.

Freudenthal, Hans (1973): *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: Reidel.

Friedrich, Gerhard/de Galcóczy, Viola (2004): *Komm mit ins Zahlenland*, Freiburg/Breisgau: Christopherus im Verlag Herder

Fritz, Annemarie/Ricken, Gabi (2005): „Früherkennung von Kindern mit Schwierigkeiten im Erwerb von Rechenfertigkeiten." In: Marcus Hasselhorn/Wolfgang Schneider/ Harald Marx (Hg.), *Diagnostik von Mathematikleistungen*, Göttingen: Hogrefe, S. 5-27.

Fuson, Karen C. (1983): "Matching, Counting and Conservation of Numerical Equivalence." In: *Child Development* 54, S. 91-97.

Gallistel, Charles R./Gelman, Rochel (1992): "Preverbal and Verbal Counting and Computation." In: *Cognition* 44, S. 43-74.

Gelman, Rochel/Gallistel Charles R. (1978): *The Child's Understanding of Number*, Cambrigde, MA: Harvard University Press.

Ginsburg, Herbert/Opper, Sylvia (1998): Piagets *Theorie der geistigen Entwicklung*, Stuttgart: Klett-Cotta.

Gravemeijer, Koeno (1994): *Developing Realistic Mathematics Education*, Utrecht: CDPress.

Kaufmann, Sabine (2003): *Früherkennung von Rechenstörungen in der Eingangsklasse der Grundschule und darauf abgestimmte remediale Maßnahmen*, Frankfurt/Main: Lang.

Krajewski, Kristin (2003): *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*, Hamburg: Kovač.

Krauthausen, Günter/Scherer, Petra (2001): *Einführung in die Mathematikdidaktik*, Heidelberg: Spektrum.

Lampert, Magdalene/Bunk, Merrie L. (Hg.) (1998): *Talking Mathematics in School*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, Jean (1989): *Cognition in Practice. Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*, Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Moser Opitz, Elisabeth (2001): *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen*, Bern: Haupt.

Nunes, Terezinha/Bryant, Paul (1996): *Children Doing Mathematics*, Oxford: Blackwell.

Piaget, Jean (1952): *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*, Stuttgart: Klett.

Piaget, Jean (1967a): *Psychologie der Intelligenz*, Stuttgart: Klett.

Piaget, Jean (1967b): „Die Genese der Zahl beim Kind." In: Heinrich Abel et al. (Hg.), *Rechenunterricht und Zahlbegriff,* Braunschweig: Westermann, S. 50-72.

Piaget, Jean (1972): *Die Entwicklung des Erkennens: Das mathematische Denken*, Stuttgart: Klett-Cotta.

Piaget, Jean/Inhelder, Bärbel (1975): *Die Entwicklung der physikalischen Mengenbegriffe beim Kinde*, Stuttgart: Klett.

Pimm, David (1987): *Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classrooms*, London: Routledge.

Pound, Linda (1999): *Supporting Mathematical Development in the Early Years,* Buckingham: Open University Press.

Resnick, Lauren B. (1983): „A Developmental Theory of Number Understanding." In: Herbert Ginsburg (Hg.), *The Development Mathematical Thinking*, New York: Academic Press, S. 109-151.

Schmitman gen. Pothmann, Angela (2006): *Vorschulische Diagnostik von Sprachstand und Zahlbegriffsentwicklung. Theoretische und empirische Befunde zu Mehrsprachigkeit und (frühen) mathematischen Kompetenzen und möglichen Zusammenhängen bei Kindern mit Migrationshintergrund.* Diplomarbeit im Studiengang der Interkulturellen Pädagogik der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg.

Sophian, Catherine (1995): "Representation and Reasoning in Early Numerical Development. Counting, Conservation, and Comparison between Sets." In: *Child Development* 66, S. 559-577.

Starkey, Prentice/Spelke, Elizabeth/Gelman, Rochel (1990): "Numerical Abstraction by Human Infants." In: *Cognition* 36, S. 97-127.

Steinbring, Heinz (1998). *Language and Communication in Mathematics Classrooms*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stendler-Lavatelli, Celia (1976): *Früherziehung nach Piaget. Wie Kinder Wissen erwerben – ein*

Programm zur Förderung der kindlichen Denkoperationen, München: Reinhardt.
Stern, Elsbeth (1998): *Die Entwicklung mathematischen Verständnisses im Kindesalter*, Lengerich: Pabst.

van Oers, Bert (2004): „Mathematisches Denken bei Vorschulkindern." In: Wassilios E. Fthenakis/ Pamela Oberhuemer (Hg.), *Frühpädagogik international. Bildungsqualität im Blickpunkt*, Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften, S. 313-329.

Vygotkij, Lev S. (1969): *Denken und Sprechen*, Frankfurt/Main: Fischer.

Wember, Franz B. (1986): *Piagets Bedeutung für die Lernbehindertenpädagogik*, Heidelberg: Schindele.

Williams, Robert B. (1991): "Relations among Tasks Assessing Young Children's Number Concept." In: *Perceptual and Motor Skills* 72, S. 1031-1038.

Wittmann, Erich Chr. (1981): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Braunschweig: Vieweg.

Wynn, Karen M. (1992): "Addition and Subtraction by Human Infants." In: Nature 358, S. 749-750.